Vorlesung 6

Taylor Reihen - Theorie

Differentialgleichungen

Taylor Reihen - Theorie

Inhaltsübersicht

- Taylor Reihe - Theorie…
    - Woher kommt die Formel?
    - Kann jede Funktion entwickelt werden?
- Taylorreihen für Skalarfelder

Taylor Reihen - Theorie

Woher kommt die Formel?

Wir entwickeln eine Funktion $f(x)$ an einer Stelle x_0 in eine Taylor Reihe…

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$



Woher kommt diese Formel?

Differentialgleichungen

Taylor Reihen - Theorie

Woher kommt die Formel?

Wir beginnen mit der Linearisierung…

Was wissen wir?

Wir suchen die Tangente, d.h. eine Gerade für die allgemein gilt…

$$t(x) = m \cdot x + b$$

Wir suchen zwei Parameter, d.h. wir benötigen zwei Bestimmungs-gleichungen

Differentialgleichungen

Taylor Reihen - Theorie

Woher kommt die Formel?

Wir beginnen mit der Linearisierung…

Was wissen wir?

Wir suchen die Tangente, d.h. eine Gerade für die allgemein gilt…

$$t(x) = m \cdot x + b$$

Die Funktion stimmt mit der Tangenten an der Stelle x_0 überein…

$$f(x_0) = t(x_0)$$

Die erste Ableitung stimmt mit der Ableitung der Tangenten überein…

$$f'(x_0) = t'(x_0)$$

Differentialgleichungen

Taylor Reihen - Theorie

Woher kommt die Formel?

Wir erhalten eine Steckbriefaufgabe…

Gesucht ist eine Funktion der Form… $t(x) = m \cdot x + b$

… mit den Eigenschaften:

$$f(x_0) = t(x_0) \Rightarrow f(x_0) = m \cdot x_0 + b$$

$$f'(x_0) = t'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = m$$

$$m = f'(x_0)$$

$$b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

… Einsetzen in die Tangentengleichung:

$$t(x) = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

$$= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Leftarrow \text{Taylor Formel!}$$

Differentialgleichungen

Taylor Reihen - Theorie

Woher kommt die Formel?

Wir wollen nun eine Parabel anpassen…

Was wissen wir?

Wir suchen eine Parabel, d.h. allgemein gilt…

$$t_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Wir suchen drei Parameter, d.h. wir benötigen drei Bestimmungs-gleichungen

Differentialgleichungen

Taylor Reihen - Theorie

Woher kommt die Formel?

Wir wollen nun eine Parabel anpassen…

Was wissen wir?

Wir suchen eine Parabel, d.h. allgemein gilt…

$$t_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Die ersten beiden Gleichungen stimmen mit denen der Tangente überein, d.h. der Funktionswert und die erste Ableitung stimmt überein…

$$f(x_0) = t_2(x_0) \qquad f'(x_0) = t_2{}'(x_0)$$

Differentialgleichungen

Taylor Reihen - Theorie

Woher kommt die Formel?

Wir wollen nun eine Parabel anpassen…

Was wissen wir?

Wir suchen eine Parabel, d.h. allgemein gilt…

$$t_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Die ersten beiden Gleichungen stimmen mit denen der Tangente überein, d.h. der Funktionswert und die erste Ableitung stimmt überein…

$$f(x_0) = t_2(x_0) \qquad f'(x_0) = t_2{}'(x_0)$$

Zusätzlich soll auch die zweite Ableitung übereinstimmen…

$$f''(x_0) = t_2{}''(x_0)$$

Differentialgleichungen

Taylor Reihen - Theorie

Woher kommt die Formel?

Wir erhalten wieder eine Steckbriefaufgabe…

Gesucht ist eine Funktion der Form… $t_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

… mit den Eigenschaften:

$$f(x_0) = t(x_0) \Rightarrow f(x_0) = a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0$$

$$f'(x_0) = t'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 2a_2x_0 + a_1$$

$$f''(x_0) = t_2''(x_0) \Rightarrow f''(x_0) = 2a_2$$

Von unten nach oben lösen!

Lösungen:

$$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2} \qquad a_1 = f'(x_0) - f''(x_0)x_0$$

$$a_0 = f(x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}x_0^2 - (f'(x_0) - f''(x_0)x_0)x_0$$

Differentialgleichungen

Taylor Reihen - Theorie

Woher kommt die Formel?

Wir erhalten wieder eine Steckbriefaufgabe…

Gesucht ist eine Funktion der Form… $t_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

Wir setzen zusammen…

$$a_0 = f(x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}x_0^2 - (f'(x_0) - f''(x_0)x_0)x_0 \quad a_1 = f'(x_0) - f''(x_0)x_0 \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$

$$t_2(x) = \frac{f''(x_0)}{2}x^2 + f'(x_0)\,x - f''(x_0)x_0 \cdot x + f(x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}x_0^2 - f'(x_0)\,x_0 + f''(x_0)x_0^2$$

Zusammenfassen liefert…

$$t_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2}x^2 - f''(x_0)x_0 \cdot x + \frac{f''(x_0)}{2}x_0^2}_{= \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}$$

Taylor Reihen - Theorie

Woher kommt die Formel?

Für die Ordnungen $n = 3,4, \ldots$ wird analog vorgegangen…

Allgemein kommt für den Schritt von Ordnung n zu $n+1$ eine neue Bedingung hinzu…

… die $n+1$ –te Ableitung muss übereinstimmen

Durch wiederholtes Ableiten der Monome x^n kommt die Faktultät $n!$ in die Formeln…

$$f(x) = x^2 \qquad f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$$

$$f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Taylor Reihen - Theorie

Kann jede Funktion in eine Taylorreihe entwickelt werden?

Achtung:

Es geht hier um die Entwicklung in eine komplette Taylorreihe, d.h. wir summieren unendlich viele Terme auf. Es geht nicht um die Approximation in den Ingenieurwissenschaften, bei denen die Entwicklung bei $n = 1{,}2$ oder 3 abgebrochen wird!

Taylor Reihen - Theorie

Kann jede Funktion in eine Taylorreihe entwickelt werden?

Was benötigen wir für eine Entwicklung in eine Taylorreihe?

Wir betrachten die Formel…

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$



Die Funktion muss unendlich oft differenzierbar sein!

Differentialgleichungen

Taylor Reihen - Theorie

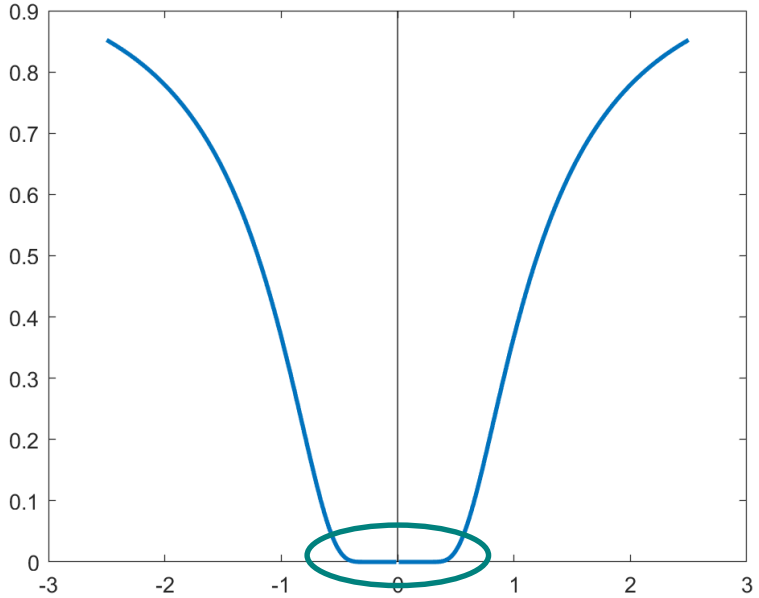
Kann jede Funktion in eine Taylorreihe entwickelt werden?

Können wir jede unendlich oft differenzierbare Funktion in eine Taylorreihe entwickeln?

Die Antwort ist Nein…

Gegenbeispiel:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



- Die Funktion ist unendlich oft diffbar

- Es ist $f^{(n)}(0) = 0$

⇒ Die Taylorreihe ist identisch null und stimmt außer bei null nicht mit der Funktion überein

Differentialgleichungen

Taylor Reihen - Theorie

Kann jede Funktion in eine Taylorreihe entwickelt werden?

Funktionen die in eine Taylorreihe entwickelt werden können
werden „analytisch" genannt.

Leider gibt es kein Kriterium mit dem wir einfach feststellen können,
ob eine Funktion analytisch ist oder nicht.

Wir müssen für jede Funktion eine aufwändige Restgliedbetrachtung machen…

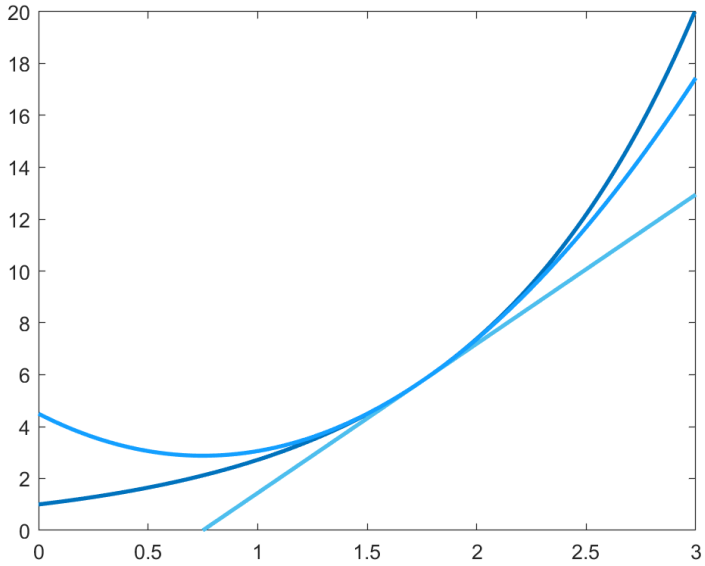


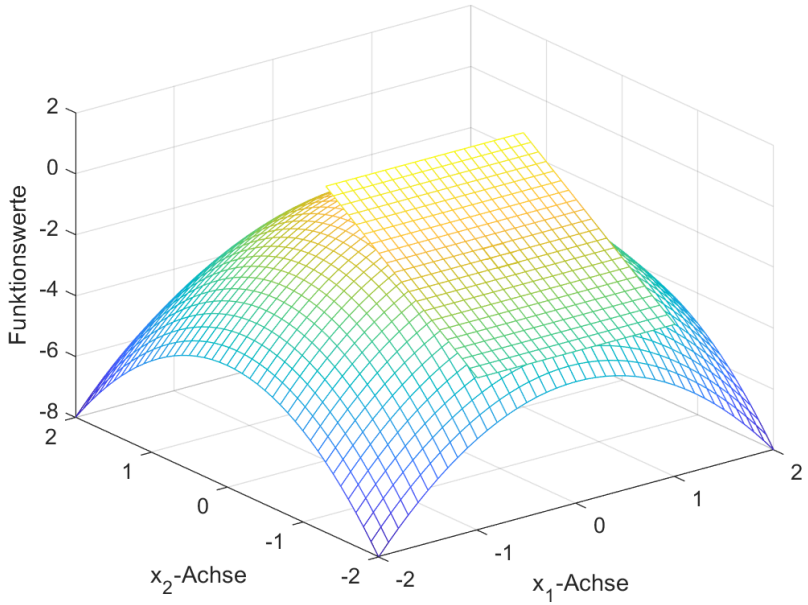
Da wir eher an einer Approximation interessiert sind, d.h
wir brechen die Entwicklung bei einem n ab, gehen wir
auf die Restgliedbetrachtung nicht weiter ein.

Approximation von Funktionen & Daten

Taylor für Skalarfelder - Tangentialebene

Taylor für Skalarfelder...





Taylor für Skalarfelder - Tangentialebene

Wie kann ich die Tangentialebene bestimmen?

Wir übertragen die Taylor Formel von 1D auf Skalarfelder…

$$t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$



$$t_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Skalarfelder hängen von mehreren Variablen ab, wir schreiben:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = f(\vec{x})$$

Taylor für Skalarfelder - Tangentialebene

Wie kann ich die Tangentialebene bestimmen?

Wir übertragen die Taylor Formel von 1D auf Skalarfelder…

$$t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

$$t_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$t_1(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

Taylor für Skalarfelder - Tangentialebene

Ein Beispiel...

Wie wollen das Skalarfeld f im Punkt P linearisieren, d.h. durch die Tangential-ebene approximieren (Taylor 1. Ordnung).

$$f(\vec{x}) = -0.2x_1^2 - 0.1x_2^2 \qquad P = (0,1)$$

Die allgemeine Formel lautet: $t_1(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$

Funktionswert ausrechnen: $f(0,1) = -0.1$

Gradient bestimmen & Punkt auswerten: $\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -0.4x_1 \\ -0.2x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.2 \end{pmatrix}$

In die allgemeine Formel einsetzen:

$$t_1(\vec{x}) = -0.1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} = -0.1 - 0.2 \cdot (x_2 - 1) = 0.1 - 0.2 \cdot x_2$$

Taylor für Skalarfelder – Approximation 2. Ordnung

Wie sieht die Approximation bis zur Ordnung 2 aus?

Wir übertragen die Taylor Formel von 1D auf Skalarfelder…

$$t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

$$t_2(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2$$

$$t_1(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{x}_0)^T \cdot \nabla^2 f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

Taylor für Skalarfelder – Approximation 2. Ordnung

Ein Beispiel…

Wie wollen das Skalarfeld f im Punkt P bis zur Ordnung 2 Approximieren…

$$f(\vec{x}) = \sin x_1 + \cos x_2 \qquad P = (0,0)$$

Allgemeine Formel: $t_1(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{x}_0)^T \cdot \nabla^2 f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$

Funktionswert ausrechnen: $f(0,0) = 1$

Gradient bestimmen & Punkt auswerten: $\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \cos x_1 \\ -\sin x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Hesse Matrix:

$$\nabla^2 f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -\sin x_1 & 0 \\ 0 & -\cos x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Taylor für Skalarfelder – Approximation 2. Ordnung

Ein Beispiel…

Wir setzen alles zusammen… $f(\vec{x}) = \sin x_1 + \cos x_2 \qquad P = (0,0)$

$$t_2(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{x}_0)^T \cdot \nabla^2 f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

$$\Rightarrow \quad f(0,0) = 1 \qquad \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad t_2(\vec{x}) = 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\,(x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + x_1 - \frac{1}{2} \cdot x_2^2$$

Taylor für Skalarfelder – Approximation 2. Ordnung

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Linearisieren Sie das Skalarfeld

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + \ln x_2$$

im Punkt P=(2,1), d.h. bestimmen Sie die Tangentialebene.

Die allgemeine Formel lautet: $t_1(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$